PROBLEMA A.3. Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. *(3 puntos)*

b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ cuando $x \geq 0$. *(3 puntos)*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. *(4 puntos)*

Solución:

a) Puntos de intersección entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Debemos resolver la siguiente ecuación:

$x^3 = 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

Para $x = 0$, $f(0) = 0^3 = 0 \rightarrow (0, 0)$

Para $x = 1$, $f(1) = 1^3 = 1 \rightarrow (1, 1)$

Los puntos de intersección buscados son: $A = (0, 0)$ *y* $B = (1, 1)$

b) $f(x) \geq g(x)$

Veamos cuando se cumple esta desigualdad.

$x^3 \geq 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$

Según hemos obtenido en el apartado anterior: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

Como $(x-1)^2$ *es siempre positivo, por estar elevado al cuadrado, el signo del primer miembro de la desigualdad depende del de* x.

Luego para $x \geq 0$ *se cumple que* $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$ *y por lo tanto* $f(x) \geq g(x)$*. c.q.d.*

c) Representemos gráficamente las dos curvas.

Por lo resuelto en el apartado a) conocemos los puntos de corte entre ambas, $A = (0, 0)$ *y* $B = (1, 1)$.

$y = 2x^2 - x$

Es una parábola. Buscamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

$x = 0 \rightarrow y = 2\,0^2 - 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

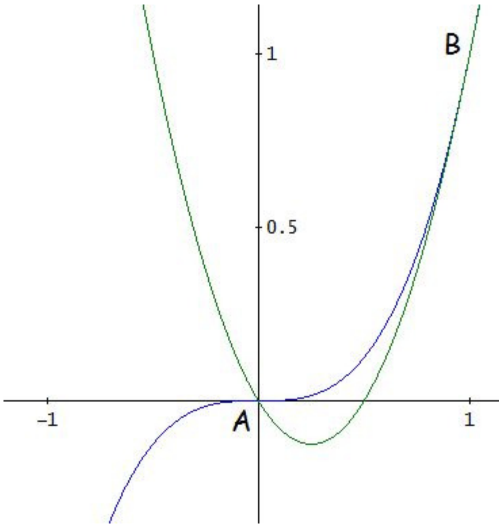
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.2} = \frac{1}{4} \rightarrow y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4} \qquad \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\right)$$

$y = x^3$

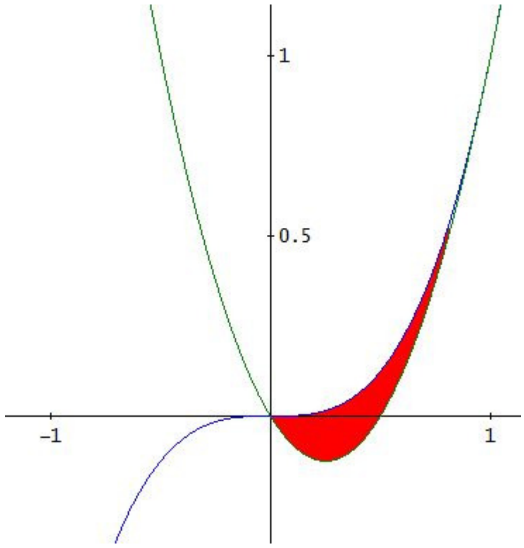
La representamos a partir de una tabla de valores,

x	$y = x^3$
-1	-1
0	0
1	1

La representación gráfica será:



El área a calcular es:



El cálculo del área pedida será mediante la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 \left(x^3 - \left(2x^2 - x\right)\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}$$

El área de la superficie limitada por las dos curvas mide $\frac{1}{12}$ *u.a.*