Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x) = x\,e^x - 3\,x$.

Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X. (2 *puntos*).

b) El punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, (2 *puntos*), así como la **justificación razonada** de que la función f es creciente cuando $x > 2$. (2 *puntos*).

c) El área limitada por el eje X y la curva $y = f(x)$, cuando $0 \le x \le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

Solución:

a) $y = f(x) = x\,e^x - 3\,x$, *¿corte con eje X?*

$$y = 0 \;\rightarrow\; x\,e^x - 3\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(e^x - 3) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ e^x - 3 = 0 \;\rightarrow\; e^x = 3 \;\rightarrow\; x = Ln\,3 \end{cases}$$

Finalmente, ***los puntos de corte de la curva y = f(x) con el eje X son (0 , 0) y (Ln 3 , 0).***

b) Para estudiar el crecimiento de $y = f(x)$ *tenemos que estudiar* y'*, y para obtener sus puntos de inflexión* y''*. Calculemos* y' *e* y''*.*

$y = x\,e^x - 3\,x$

En primer lugar, $Dom\; y = \Re$

$y' = e^x + x\,e^x - 3$

$y'' = e^x + e^x + x\,e^x = 2\,e^x + x\,e^x = (2 + x)\,e^x$

Obtengamos el punto de inflexión de la curva.

Resolvemos $y'' = 0$

$$(2 + x)\,e^x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 2 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -2 \\ e^x = 0 \quad \text{sin solución} \end{cases}$$

Podemos determinar si para $x = -2$ *hay un punto de inflexión de dos formas:*

1^a	*Calculamos* $y''' = 2\,e^x + e^x + x\,e^x = 3\,e^x + x\,e^x = (3 + x)\,e^x$ $y'''_{x=-2} = (3-2)e^{-2} = e^{-2} \neq 0 \;\rightarrow\;$ *En* $x = -2$ *hay un punto de inflexión.*
2^a	*Estudiamos el signo de* y'' *En* y'' *hay dos factores, uno de ellos* e^x *es siempre positivo, luego el signo de* y'' *depende del signo del segundo factor,* $2 + x$*, que es un polinomio de 1^er grado con coeficiente de x positivo y raíz* $x = -2$*.* *Por tanto, a la izquierda de* -2 y'' *es negativa y a la derecha positiva, luego en* $x = -2$ *hay un punto de inflexión.*

Calculemos el punto de inflexión.

$$x = -2 \;\rightarrow\; y = -2\,e^{-2} - 3(-2) = -2\,e^{-2} + 6 = 6 - \frac{2}{e^2}$$

El punto de inflexión de la curva y = f(x) es $\left(-2\,,\,6 - \dfrac{2}{e^2}\right)$

Veamos que f *es creciente cuando* $x > 2$*.*

Como $f'(x) = e^x + x\,e^x - 3 = e^x\,(x + 1) - 3$*,*

$$Si\;\; x > 2 \;\begin{cases} x + 1 > 3 \\ e^x > 1 \end{cases} \;\rightarrow\; e^x(x+1) > 3 \;\rightarrow\; e^x(x+1) - 3 > 0$$

Es decir, si $x > 2$ *entonces* $f'(x) > 0$ *y por tanto* $f(x)$ *es creciente.*

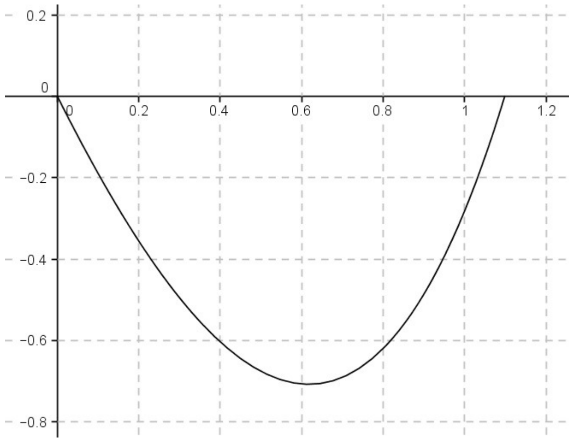
c) Es conveniente representar, de forma aproximada, $y = f(x)$ cuando $0 \le x \le Ln\ 3$ ($Ln\ 3 \cong 1´098$)

$y = f(x) = x\, e^x - 3\, x$

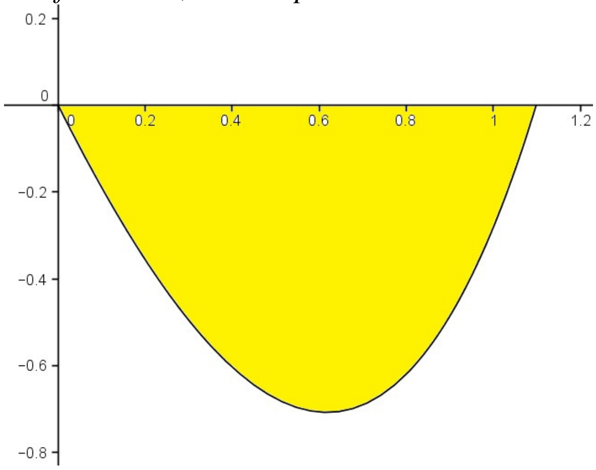
Del apartado a) sabemos que la curva corta al eje X en (0 , 0) y (Ln 3 , 0). Calculemos un punto de la curva para un valor de x entre 0 y Ln 3, por ejemplo, x = 1

$x = 1 \;\rightarrow\; y = 1 \,.\, e^1 - 3 \,.\, 1 = e - 3 = -\,0´281\ldots$

A partir de estos datos la representación gráfica de f(x) será,



Gráficamente, el área pedida es:



El área pedida se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$A = -\int_0^{Ln\,3} \left(x\, e^x - 3x\right) dx$$

En primer lugar calculamos la integral indefinida:,

$$\int \left(x\, e^x - 3x\right) dx = \int x\, e^x\; dx - \int 3x\; dx \overset{*}{=}$$

La primera integral es más complicada, calculémosla previamente.

$$\int x\, e^x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^x\, dx & \rightarrow & v = e^x \end{matrix} \right\} = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x$$

La segunda integral es más sencilla: $\int 3x\, dx = 3\dfrac{x^2}{2}$

Luego, $\overset{*}{=} x\, e^x - e^x - 3\dfrac{x^2}{2}$

Por tanto, $A = -\left[x e^x - e^x - 3\dfrac{x^2}{2} \right]_0^{Ln\,3} = -\left[\left((Ln\,3)\, e^{Ln\,3} - e^{Ln\,3} - 3\dfrac{(Ln\,3)^2}{2} \right) - \left(0\, e^0 - e^0 - 3\dfrac{0^2}{2} \right) \right] =$

$$= -\left[\left((Ln\,3)\; 3 - 3 - 3\frac{(Ln\,3)^2}{2} \right) - (-1) \right] = -\left[3Ln\,3 - 3 - \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 + 1 \right] = -\left[3Ln\,3 - 2 - \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 \right] =$$

$$= 2 + \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 - 3Ln\,3 = 0´5145865\ldots \cong 0´51459$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(2 + \dfrac{3}{2}(Ln\,3)^2 - 3Ln\,3 \right) u.a. \cong 0´51459\; u.a.$