OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices $A = (0, 20)$, $B = (20, 0)$, $C = (80, 0)$, $D = (80, 80)$ y $E = (0, 80)$. Para obtener una pieza rectangular se elige un punto $P = (x , y)$ del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo cuyos vértices son los puntos $P = (x , y)$, $F = (80, y)$, $D = (80, 80)$ y $G = (x, 80)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

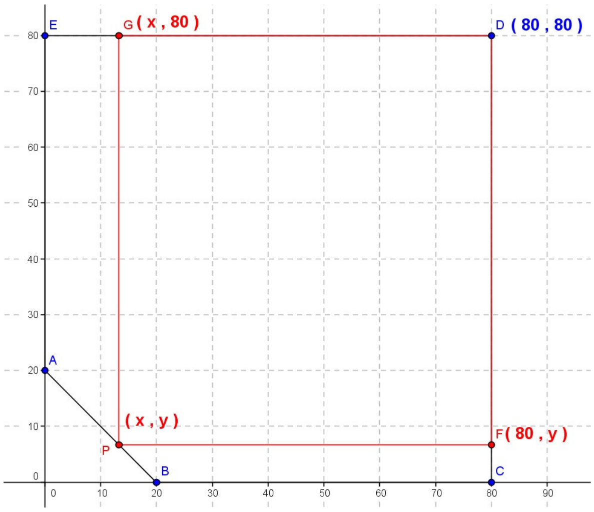
a) El área del rectángulo R en función de x, cuando $0 \leq x \leq 20$. *(3 puntos)*

b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima. *(5 puntos)*

c) El valor del área máxima del rectángulo R. *(2 puntos)*

Solución:

La representación gráfica del problema es:



a) Área del rectángulo R de vértices $PFDG$

El lado PF mide $(80 – x)$ cm, el lado PG mide $(80 – y)$ cm. El área del rectángulo R quedaría en función de x e y. Para expresar el área de R en función de x, consideramos que el punto $P (x , y) \in \overline{AB}$.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B para expresar y en función de x.

$$\begin{cases} A = (0,20) \\ B = (20,0) \end{cases} \rightarrow r : \begin{cases} Punto\ (0,20) \\ v.\ director\ (20,-20) \approx (1,-1) \end{cases} \quad luego\ r : \frac{x-0}{1} = \frac{y-20}{-1} \rightarrow -x = y - 20 \rightarrow y = -x + 20$$

El área de rectángulo R será:

$$A_R = (80 – x) (80 – y) = (80 – x) [80 – (– x + 20)]= (80 – x) (80 + x – 20) = (80 – x) (60 + x) =$$
$$= – x^2 + 20 x + 4800$$

Solución: el área del rectángulo R es $-x^2 + 20x + 4800$ (cm^2), cuando $0 \leq x \leq 20$ (cm)

b) Valor de x / A_R es máxima.

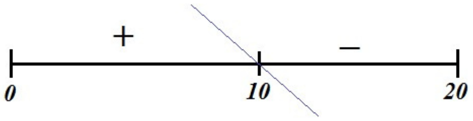
$A_R = -x^2 + 20x + 4800$, *cuando* $0 \le x \le 20$

$A_R' = -2x + 20$

$$-2x + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad -2x = -20 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-20}{-2} = 10$$

Estudiemos el signo de A_R' a la izquierda y derecha de 10.

Como A_R' es una recta de pendiente negativa cuya raíz es 10:



Luego en $x = 10$ A_R tiene un máximo relativo que es el absoluto en [0 , 20] ya que a la izquierda de 10 A_R es creciente y a la derecha es decreciente.

Solución: el área del rectángulo R es máxima para x = 10 cm.

c) Para $x = 10$, $A_R = -10^2 + 20 \cdot 10 + 4800 = -100 + 200 + 4800 = 4900$

Solución: el área máxima del rectángulo R mide 4900 cm² — $4900\ cm^2$.