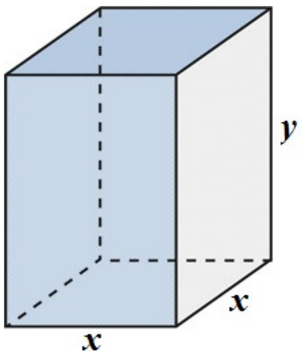
PROBLEMA B.3. Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15€ y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5€.

Obtener **<u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de la base. *(3 puntos)*
b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. *(5 puntos)*
c) El valor del mínimo coste total del depósito. *(2 puntos)*

Solución:
El depósito es un paralelepípedo de base cuadrada y sin tapa superior. Los datos del problema podemos resumirlos en:



$V = 1500\ m^3$

base a 15 €/m^2
caras laterales a 5 €/m^2

a) Coste del depósito en función de x (C).
Base cuadrada de área x^2, el coste de la base es: $15\,x^2$
Área lateral, cuatro rectángulos, mide $4\,x\,y$, el coste del área lateral es: $5\,.\,4\,x\,y = 20\,x\,y$
Por tanto, $C = 15\,x^2 + 20\,x\,y$

Falta expresar y en función de x. Lo hacemos a partir del dato $V = 1500$
El volumen de la caja es: $V = x^2\,y \;\rightarrow\; x^2\,y = 1500 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1500}{x^2}$

Luego, $C = 15\,x^2 + 20\,x\,\dfrac{1500}{x^2} = 15\,x^2 + \dfrac{30000}{x}$

Como x es la longitud del lado de la base, $x > 0$

Solución: $C = 15\,x^2 + \dfrac{30000}{x}, \quad x \in \Re^+$

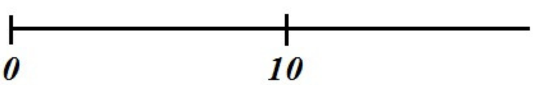
b) ¿x y / coste total mínimo?
Busquemos el mínimo de la función C anteriormente obtenida.

$$C = 15\,x^2 + \frac{30000}{x}, \quad x \in \Re^+$$

$$C' = 30x - \frac{30000}{x^2}$$

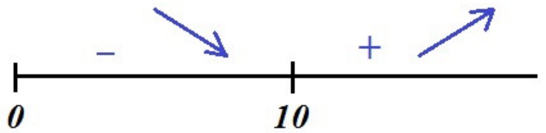
$$30x - \frac{30000}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; 30x^3 - 30000 = 0 \;\rightarrow\; 30x^3 = 30000 \;\rightarrow\; x^3 = 1000 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Para determinar si es máximo o mínimo, estudiamos el signo de C' en los intervalos:



x	C'
1	$30\,.\,1-\dfrac{30000}{1^2}=30-30000=-29970<0$
11	$30\,.\,11-\dfrac{30000}{11^2}=\dfrac{9930}{121}>0$

Luego:



En $x = 10$ C tiene un mínimo relativo que, además, es el absoluto porque la función a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente.

Para $x = 10$, $y=\dfrac{1500}{10^2}=15$

En conclusión, ***el coste del depósito es mínimo cuando el lado de la base mide 10m y la altura del depósito es de 15m.***

c) ¿Mínimo coste?

$$x=10 \quad \rightarrow \quad C=15\,.\,10^2+\frac{30000}{10}=1500+3000=4500$$

Solución: ***el coste mínimo es de 4500€.***