PROBLEMA B.3. Un pueblo está situado en el punto A (0, 4) de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva

$$y=\frac{x^2}{4}, \quad \text{siendo} \quad -6\le x\le 6.$$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia entre un punto P (x, y) del río y el pueblo en función de la abcisa x de P. *(2 puntos)*

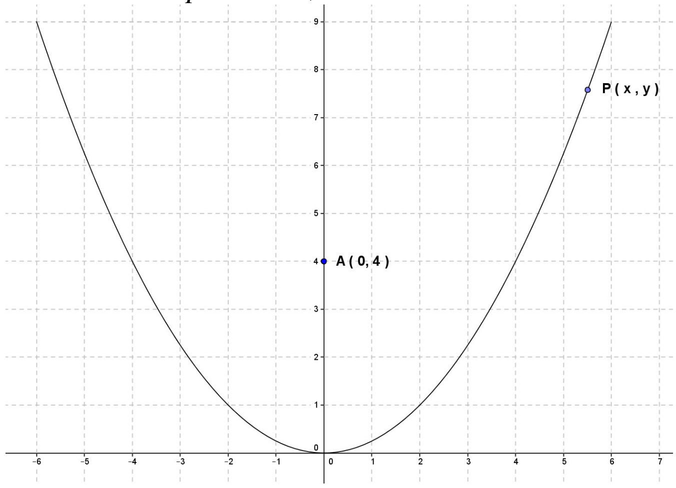
b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. *(4 puntos)*

c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. *(4 puntos)*

Solución:

Representemos gráficamente los datos del problema,

x	$y=\frac{x^2}{4}$
-6	9
-4	4
0	0
4	4
6	9



a) ¿Distancia entre P y A?

$$d=d(P,A)=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=[\text{como } P \text{ es de la curva } y=\frac{x^2}{4},\ ]=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{4}-4\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+\frac{x^4}{16}-8\frac{x^2}{4}+16}=\sqrt{\frac{x^4}{16}+x^2-2x^2+16}=\sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16}$$

Solución: $d(P,A)=\sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16} \qquad x\in[-6,6]$

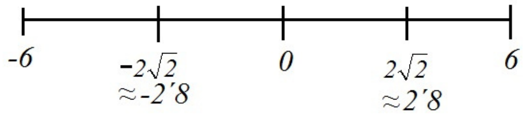
b) Debemos buscar el mínimo de la función d del apartado anterior.

$$d'=\frac{\frac{4x^3}{16}-2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16}}=\frac{\frac{x^3}{4}-2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16}}$$

Estudiemos el signo de d'. En d' el radicando del denominador lo obtuvimos como suma de dos términos al cuadrado, por tanto es positivo. Luego el denominador es positivo y el signo de d' depende del numerador. Estudiamos el signo del numerador,

$$\frac{x^3}{4}-2x=0 \;\rightarrow\; x^3-8x=0 \;\rightarrow\; x(x^2-8)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x^2-8=0 \;\rightarrow\; x^2=8 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

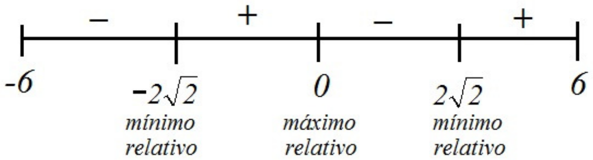
Tenemos que estudiar el signo de d´ en los intervalos:



Como el numerador es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, el signo del polinomio alterna en los cuatro intervalos; sólo necesitamos calcular el signo de d´ en uno de los intervalos.

$$x = 1 \quad \to \quad d' = \frac{\frac{1^3}{4} - 2.1}{2\sqrt{\frac{1^4}{16} - 1^2 + 16}} = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2\sqrt{\frac{1}{16} + 15}} = \frac{\frac{-7}{4}}{2\sqrt{\frac{1}{16} + 15}} < 0$$

Por tanto:



Como a la izquierda de los mínimos la función es decreciente y a la derecha creciente, uno de ellos o ambos serán los mínimos absolutos.
Calculemos el valor de d en los dos mínimos relativos obtenidos:

$$x = -2\sqrt{2} \quad \to \quad d = \sqrt{\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^4}{16} - \left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 16} = \sqrt{\frac{16\,.\,4}{16} - 4\,.\,2 + 16} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$$

$$x = 2\sqrt{2} \quad \to \quad d = \sqrt{\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^4}{16} - \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 16} = \sqrt{\frac{16\,.\,4}{16} - 4\,.\,2 + 16} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$$

Como en los dos mínimos relativos la función vale lo mismo, ambos son los absolutos.

Obtengamos los puntos del río,

$$x = -2\sqrt{2} \quad \to \quad y = \frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{4\,.\,2}{4} = 2$$

$$x = 2\sqrt{2} \quad \to \quad y = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{4\,.\,2}{4} = 2$$

Solución: los puntos del río situados a distancia mínima del pueblo son $\left(-2\sqrt{2}\,,\,2\right)$ *y* $\left(2\sqrt{2}\,,\,2\right)$**.**

c) Del estudio realizado en el apartado anterior, el máximo relativo de la distancia se alcanza en x = 0. Pero como estamos trabajando con una función definida en un intervalo, el máximo absoluto se puede alcanzar en los extremos del intervalo o en el máximo relativo.
Veamos,

$$x = 0 \quad \to \quad d = \sqrt{\frac{0^4}{16} - 0^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = -6 \quad \to \quad d = \sqrt{\frac{(-6)^4}{16} - (-6)^2 + 16} = \sqrt{\frac{1296}{16} - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7'8102$$

$$x = 6 \quad \to \quad d = \sqrt{\frac{6^4}{16} - 6^2 + 16} = \sqrt{\frac{1296}{16} - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7'8102$$

Es decir, ***los puntos del río situados a distancia máxima del pueblo son (– 6 , 9) y (6 , 9).***