PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa el valor absoluto de x. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. *(2 puntos)*

b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. *(1 punto)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, *(2 puntos)* y el extremo relativo de la función f, justificando si es máximo o mínimo. *(1 punto)*

d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$. *(1 punto)*

e) Las integrales definidas $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$. *(1,5 + 1,5 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte con ejes coordenados.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 + |0| = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + |x| = 0$

Para $x < 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$ *soluciones no válidas porque x debe ser negativo.*

Para $x \ge 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$ *($x = -1$ no válida porque x debe mayor o igual que cero).*

Solución: $x = 0$

El único ***punto de corte con los ejes coordenados es (0 , 0).***

b) Para que la curva $y = f(x)$ *sea simétrica respecto al ejes de ordenadas debe cumplir* $f(x) = f(-x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + |x| \\ f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = f(-x)$$

Luego, ***la curva y = f(x) es simétrica respecto al eje de ordenadas.***

c) Monotonía y extremos de f(x)

Para resolver este apartado es conveniente expresar f(x) como función definida a trozos.

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \ge 0 \end{cases}$$

Obtengamos f´(x),

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases} \qquad f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

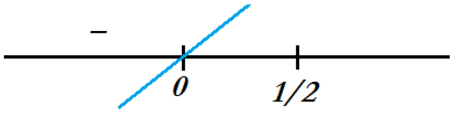
Luego, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$

Estudiemos el signo de f´(x),

Para $x < 0$,

$2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = ½$

$2x - 1$ es una recta de pendiente positiva que pasa por el punto (½ , 0), por tanto:



Es decir, f(x) es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. *Y, considerando que la función es simétrica respecto del eje de ordenadas, deducimos que la función es creciente en el intervalo* $(0, +\infty)$.

Como f(x) es decreciente a la izquierda de $x = 0$ *y creciente a la derecha, en* $x = 0$ *hay un mínimo relativo, que además es el absoluto por lo dicho anteriormente.*

Luego, ***f(x) es decreciente en*** $(-\infty, 0)$ ***y creciente en*** $(0, +\infty)$. *Y* ***en el punto*** $(0, 0)$ ***hay un mínimo relativo***.

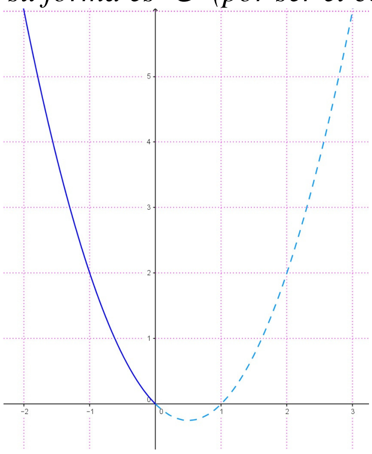
d) Representación gráfica de f(x).

Como f(x) es simétrica respecto del eje de ordenadas, representamos la función para valores de $x < 0$ *y para* $x > 0$ *la representamos por simetría.*

Anteriormente obtuvimos $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

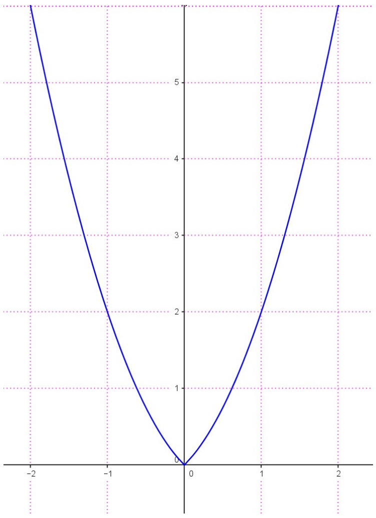
Para $x < 0$, $f(x) = x^2 - x$. *Esta función es una parábola de la que obtuvimos, en el apartado a), sus puntos de corte con el eje de abcisas:* $(0, 0)$ *y* $(1, 0)$, *y su forma es* $\cup$ *(por ser el coeficiente de* x^2 *positivo)*

Luego para $x < 0$ *la representación de f(x) es:*

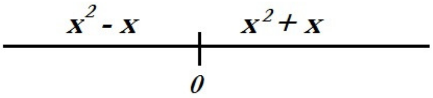


Completando la representación de f(x) por simetría obtendríamos:

La representación de $y = f(x)$ *es:*



e) f(x) es



$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 + x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - 0 = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{14}{3}$$