PROBLEMA A.3. Consideramos la función $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$. *(2 puntos)*

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. *(4 puntos)*

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ *(4 puntos)*

MAT II Jul 2018 ⑥

A.3

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x).$$

a) $x = 1 \rightarrow f(1) = 22$

$22 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 \cdot \cos(\pi \cdot 1)$

$22 = a + b + c(-1) \rightarrow a + b - c = 22$

La relación entre los coefi es $a + b - c = 22$

b) P es el punto de $y = f(x)$ cuando $x = 1$; según el apartado anterior $P(1, 22)$

Para que la tangente a $y = f(x)$ en P sea horizontal $\rightarrow y'_{x=1} = 0$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c\cos(\pi x) + c \cdot x \cdot (-\operatorname{sen}(\pi x)) \cdot \pi =$

$= 3ax^2 + 2bx + c\cos(\pi x) - \pi \cdot c\, x \operatorname{sen}(\pi x)$

$y'_{x=1} = 3 \cdot a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \cdot \cos(\pi \cdot 1) - \pi c \cdot 1 \underline{\operatorname{sen}(\pi \cdot 1)} =$

$= 3a + 2b - c$

La relación es $3a + 2b - c = 0$

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$

Calculemos, por partes

$$\int x\cos(\pi x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos(\pi x)\,dx \rightarrow v = \int \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) \end{array}\right. =$$

7

$$= x \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) - \int \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \cdot (-\cos(\pi x)) \right] =$$

$$= \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}$$

luego

$$\int_0^1 x \cos(\pi x)\, dx = \left[\frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1 \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot 1)}{\pi} + \frac{\cos(\pi \cdot 1)}{\pi^2} \right) - \left(\frac{0 \cdot \operatorname{sen}(\pi \cdot 0)}{\pi} + \frac{\cos(\pi \cdot 0)}{\pi^2} \right) =$$

$$= \frac{1 \cdot 0}{\pi} + \frac{-1}{\pi^2} - \left(0 + \frac{+1}{\pi^2} \right) = \frac{-1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi^2}$$

$$\simeq -0'2026$$