PROBLEMA B.3. Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud *x*, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud 100 – *x*, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

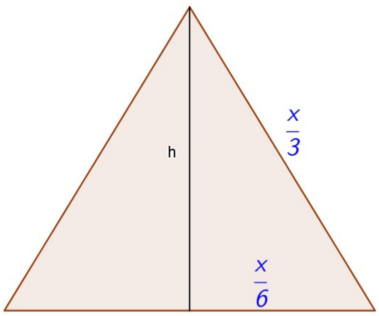
a) La función de la variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$. *(4 puntos)*

b) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor. *(3 puntos)*

c) El valor de la variable x en el intervalo [0,100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido. *(3 puntos)*

Solución:
Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes.
Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero [de lado $x/3$]
y con la otra, de longitud 100 – x, se construye un cuadrado [de lado $(100 - x)/4$]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{6}\right)^2 + h^2 \rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{36} + h^2 \rightarrow h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} \rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{36} \rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{36} \rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

(como h es una longitud, h > 0)

Luego, $A_T = \dfrac{\frac{x}{3}\,\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \dfrac{\frac{x^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2 = \frac{(100 - x)^2}{16}$$

Finalmente, la suma de las áreas es $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \dfrac{(100 - x)^2}{16} \qquad 0 \le x \le 100$

b) Mínimo de f(x).

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 2x + \frac{1}{16}\cdot 2(100 - x)\cdot(-1) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{1}{8}(100 - x) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{100}{8} + \frac{x}{8} = \frac{4\sqrt{3}\,x - 900 + 9x}{72} =$$

$$= \frac{\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 900}{72}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 900}{72} = 0 \rightarrow \left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 900 = 0 \rightarrow \left(4\sqrt{3} + 9\right)x = 900$$

$$x = \frac{900}{4\sqrt{3} + 9} \cong 56'5035 \quad (\in [0, 100])$$

Como $f'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.
En x = 56´5035 hay un mínimo local y como f(x) a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función f(x) alcanza su mínimo para $x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9}\, cm \cong 56´5035\ cm$

c) Máximo de f(x):

Como f(x) está definida en un intervalo cerrado, la función alcanza su máximo en el interior del intervalo o en los extremos. En el interior, como hemos obtenido en el apartado anterior, alcanza el mínimo.

Calculemos el valor de f(x) en los extremos del intervalo (para x = 0 y x= 100)

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 0^2 + \frac{(100-0)^2}{16} = \frac{100^2}{16} = 625$$

$$f(100) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 100^2 + \frac{(100-100)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot 100^2 = 481$$

El máximo de f(x) se alcanza para x = 0*, en este caso* ***todo el alambre se usa para construir un cuadrado de 25 cm de lado****.*