PCE_Matemáticas II_Septiembre 2019_TEST

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica que $A^2 = I$ siendo I la matriz identidad, cuando:
   a) a = 0
   b) a = ±1
   c) a = ±2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

2. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es:
   a) Uno
   b) Dos
   c) Tres

El rango de A se calcula estudiando sus determinates:

$$|A|_{3x3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg\,A \leq 2$$

$$|A|_{2x2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg = 2$$

3. Sea A una matriz cuadrada de tamaño 3 x 3. Si el determinante de A es det A = 3, entonces el determinante de la matriz traspuesta A^t es:
   a) Det (A^t) = -3
   b) Det (A^t) = 1/3
   c) Det (A^t) = 3

Por propiedades de los determinantes: $|A| = |A^t|$

4. El conjunto de soluciones del sistema: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$ es:
   a) $\{(\lambda, 1-3\lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in R\}$
   b) $\{(1-3\lambda, \lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in R\}$
   c) $\{(-1-2\lambda, 1-3\lambda, \lambda) : \lambda \in R\}$

- $\boxed{x = \lambda} \longrightarrow \boxed{y = 1 - 3\lambda}$

- $\lambda - (1 - 3\lambda) + 2z = -3 \rightarrow \boxed{z = -1 - 2\lambda}$

5. Las rectas $r: x = y - 1 = z$ y $s: \frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-2}{4}$:
   a) Son paralelas
   b) Se cortan en un punto
   c) No son paralelas, ni se cortan en un punto

$P_r = (0, 1, 0)$ $\quad P_s = (1, 2, 2)$ $\longrightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (1, 1, 2)$

$\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$ $\quad \overrightarrow{v_s} = (2, 1, 4)$

1). Comparamos $\frac{\overrightarrow{v_r}}{\overrightarrow{v_s}} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{4}$ $\rightarrow$ cortan ó cruzan

2). Prod. mixto vectores:

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

6. La ecuación del plano que contiene a las rectas: $r: \frac{x+1}{2} = y = z + 1$ y $s: \frac{x-5}{2} = y - 4 = z$ es:
   a) $3x - 4y - 2z + 1 = 0$
   b) $x + 2y + 3z = 1$
   c) $x + 4y - z = 0$

$P_r = (-1, 0, -1)$ $\quad P_s = (5, 4, 0)$ $\rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (6, 4, 1)$

$\vec{v_r} = (2, 1, 1)$ $\quad \vec{v_s} = (2, 1, 1)$

$\vec{v_r} \parallel \vec{v_s}$ = Necesitamos otro vector

$$\pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

7. La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1, 0, 0); Q(0, 2, 0) y R(0, 0, 1) es:
   a) $2x + y + 2z = 2$
   b) $x + y + z = 2$
   c) $2x - y + 2z = 1$

$\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 0)$

$\overrightarrow{PR} = (-1, 0, 1)$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y + 2z = 2$$

8. La distancia del punto P(4, 6, 0) al plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$
   a) 1
   b) 3
   c) 2

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 4 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|3|}{3} = 1\ u$$

9. La función $f(x) = sen\, x \cdot \cos x$:
   a) Es par, es decir, se verifica que $f(-x) = f(x)$
   b) Es impar, es decir, se verifica que $f(-x) = -f(x)$
   c) Es no negativa, es decir que $f(x) \geq 0\ \forall x \in R$

si $f(x) = f(-x) \rightarrow$ PAR.

si $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ IMPAR.

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \\ f(-x) = \operatorname{sen}(-x) \cdot \cos(-x) \\ -f(x) = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) \\ \cos(x) = \cos(-x) \end{matrix}\right\} \longrightarrow -f(x) = f(-x)$$

10. La función:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x}{lnx} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ (x^2+1) & si\ x < 0 \end{cases}$$

a) Es continua en x = 0
b) Los límites laterales en x = 0 son finitos pero distintos
c) Uno de los límites laterales en x = 0 es infinito

Función continua cuando:

$$\lim_{x \to -a} = \lim_{x \to +a} = f(a)$$

$$\begin{cases} f(0) = \boxed{0} \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + 1 = \boxed{1} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{Lnx} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'H} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \boxed{0} \end{cases}$$

No es continua en $x = 0$

Los lím. son distintos

PCE_Matemáticas II_Septiembre 2019_PROBLEMAS

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$$

a) Calcular el dominio y el conjunto de puntos donde la función es continua.
b) Estudiar si tiene asíntotas.
c) Estudiar el crecimiento y los extremos relativos.
d) Haga un dibujo aproximado de la gráfica.

a)

La función no existe cuando el denominador se anula, es decir:

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{0^{\circ} \text{ NULO}\}$

$9 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{-3, 3\}$

Continua en todo su Dominio.

b) $\boxed{\text{A.V}}$ en $x = -3$, $x = 3$

$\boxed{\text{A.H}}$ en $y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{9 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{9 - x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

$\boxed{\text{A.O}}$ $\nexists$

c) $f'(x) = 0 \rightarrow$ PTOS RELATIVOS

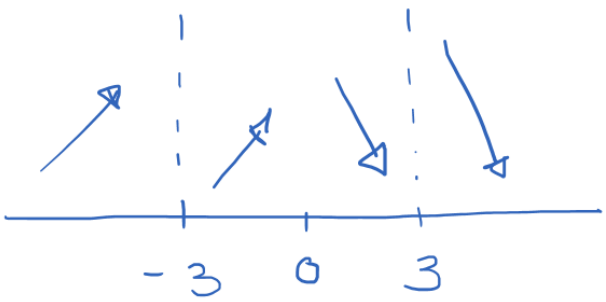
$$f' = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} = 0 \rightarrow 9+x^2 = 0 \rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

No hay máx ni mín.

$f''(x) \rightarrow$ PTOS INFLEXIÓN

$$f'' = \frac{2x(27+x^2)}{(9-x^2)^3} = 0 \rightarrow 2x(27+x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \nexists \end{cases}$$

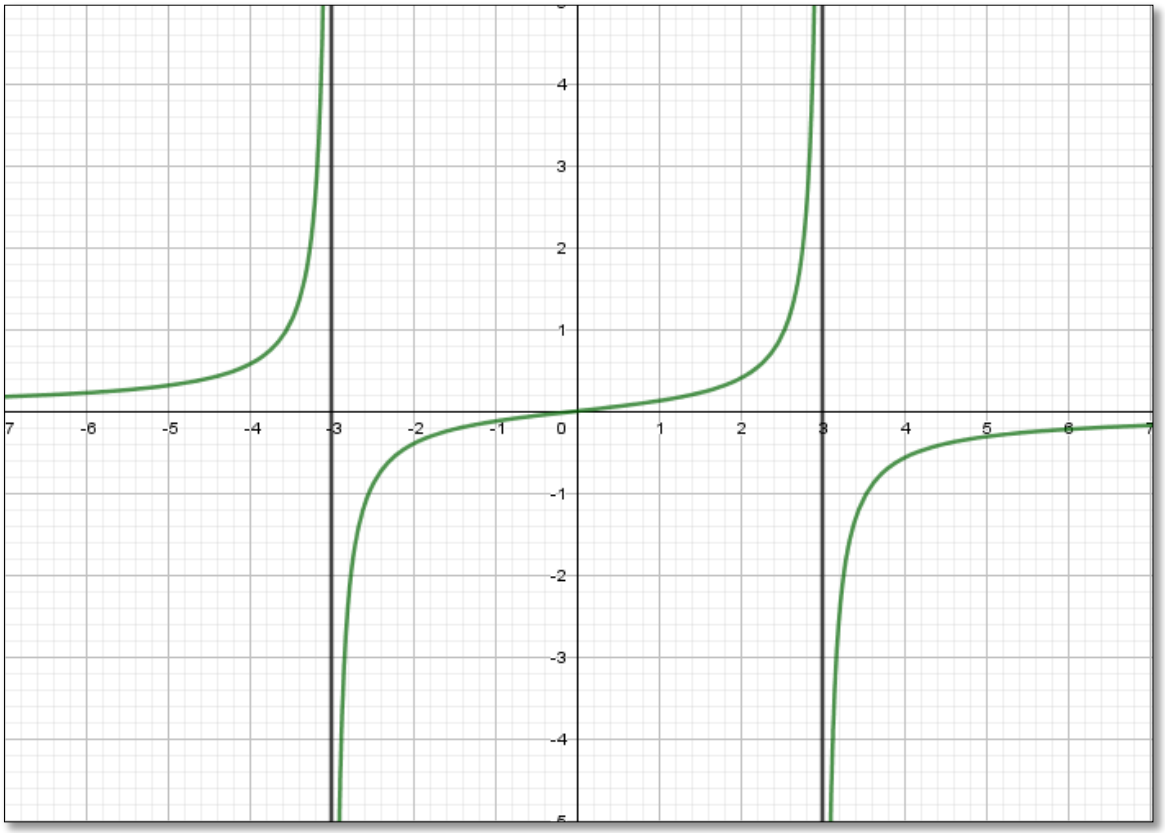
Hay un pto de inflexión en $x = 0$



Con los datos anteriores establecemos los siguientes intervalos:

$(-\infty, -3)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(-3, 0)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(0, 3)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(3, +\infty)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo

d)



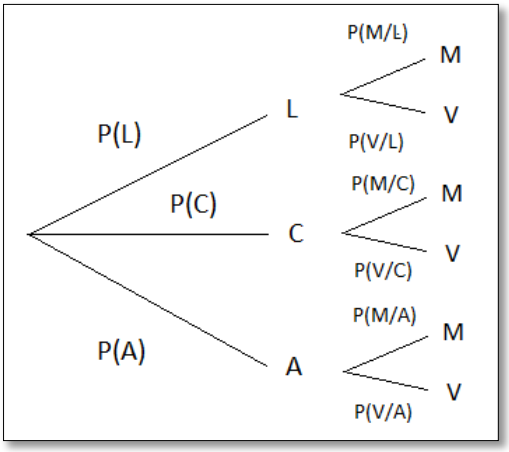
2. En la Universidad de Guadamonte hay tres facultades: de letras, de ciencias y de artes. El 60% de los estudiantes son de letras, y los de ciencias son el 30%. Si las mujeres de letras suponen el 50%, en ciencias el 60% y en arte el 70%:
   a) Dibuje un diagrama en árbol (o árbol de probabilidad) que recoja las probabilidades de los sucesos descritos.
   b) Calcule cual es la probabilidad de que un estudiante escojido al azar sea varón.
   c) Si la presidenta de la asociación de estudiantes es mujer, calcule la probabilidad de que sea de letras.

a)

Inicialmente definimos los sucesos:

- Suceso L: Estudiantes que son de letras.
- Suceso C: Estudiantes que son de ciencias.
- Suceso A: Estudiantes que son de artes.
- Suceso M: Estudiantes mujeres.
- Suceso V: Estudiantes varones.

Elaboramos un diagrama en árbol para visualizar la información aportada en el enunciado:



Sabemos que:

- El 60 % de los estudiantes son de letras, es decir: P(L) = 0,6
- El 30 % de los estudiantes son de ciencias, es decir: P(C) = 0,3
- Es decir, que el resto de estudiantes (10 %) son de artes: P(A) = 1 – P(L) – P(C) = 0,1
- El 50 % de las mujeres son de letras, es decir: P(M/L) = 0,5
- Es decir, que el resto de estudiantes de letras (50 %) son varones: P(V/L) = 1 – P(M/L) = 0,5
- El 60 % de las mujeres son de ciencias, es decir: P(M/C) = 0,6
- Es decir, que el resto de estudiantes de ciencias (40 %) son varones: P(V/C) = 1 – P(M/C) = 0,4
- El 70 % de las mujeres son de artes, es decir: P(M/A) = 0,7
- Es decir, que el resto de estudiantes de artes (30 %) son varones: P(V/A) = 1 – P(M/A) = 0,3

b) $P(V) = 0'3 \cdot 0'4 + 0'6 \cdot 0'5 + 0'1 \cdot 0'3 = 0'45 \approx 45\%$

c) $P(L/M) = \dfrac{P(L \cap M)}{P(M)} = \dfrac{0'6 \cdot 0'5}{0'55} = 0'\overline{54} \approx 54\%$

$\hookrightarrow P(M) = 1 - P(V) = 1 - 0'45 = 0'55$