EXAMEN Matemáticas II PCE 2024.

Convocatoria mayo. Fecha de examen 22/05/2024

TEST

Quince preguntas tipo test de las cuales puede responder a diez y solo a diez.
En caso de responder más de 10 preguntas, solo se contarán las 10 primeras respondidas.
Valor total de esta parte 5 puntos. Cada pregunta de tipo test ofrece tres opciones para la respuesta de las que sólo una es correcta. Se puntúa de la forma siguiente:

- La respuesta correcta suma 0,5 puntos. La respuesta incorrecta resta 0,1 puntos.
- La respuesta en blanco o marcada incorrectamente se valora con 0 puntos.

1. Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

   a) Puede tener exactamente dos soluciones
   b) Si tiene un número par (mayor que 0) de soluciones, tiene infinitas
   c) Ninguna de las anteriores

2. Si A, B son matrices reales tales que es posible formar el producto AB y, además, rango(A) = 2 y rango(B) = 3, entonces rango(AB) es:

   a) 6
   b) 3
   c) Ninguna de las anteriores

   Para el producto de matrices AB, se tiene que: rango(AB)≤min(rango(A),rango(B)). Por lo tanto, el rango de AB no puede ser mayor que el menor de los rangos de A y B, que en este caso es 2.

3. Todo sistema de ecuaciones lineales que tiene más ecuaciones que incógnitas:

   a) Es incompatible
   b) Es compatible indeterminado
   c) Ninguna de las anteriores

Un sistema con más ecuaciones que incógnitas generalmente tiene soluciones incompatibles, pero puede tener solución única o ser compatible indeterminado en casos especiales.

4. Si A es una matriz real m x n (con m distinto de n) y B es otra matriz tal que existen los productos AB y BA:

a) Entonces B es una matriz n x n
b) Entonces B es una matriz n x m
c) Ninguna de las anteriores

Para que los productos AB y BA existan, B debe ser de tamaño nxm

5. En el espacio vectorial R^3:

a) Puede haber un sistema generador con cuatro vectores
b) Los elementos de todo sistema generador forman una base
c) Ninguna de las anteriores

En R3, un sistema generador necesita exactamente 3 vectores para formar una base.

6. Dados los puntos del espacio A(1, 7, 11) y B(4, -2, 17), otro punto alineado con ellos P(a, b, c) y tal que está a la mitad de distancia de A que de B), cumple:

a) $a + b + c = 19$
b) $a \cdot b \cdot c < 0$
c) Ninguna de las anteriores

Primero, encontremos el punto P que está a la mitad de distancia entre A y B:

$$P = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{7+(-2)}{2}, \frac{11+17}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 14\right)$$

Sumamos las coordenadas de P: a+b+c= 5/2 + 5/2 + 14 = 5 + 14 = 19

7. El valor de $k \in R$ para el cual los vectores $u = (k, 1)$ y $v = (6, 3)$ son linealmente dependientes:

a) Puede ser negativo
b) Es impar
c) Ninguna de las anteriores

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

Para que los vectores sean linealmente dependientes, deben ser proporcionales: (k,1)= λ (6,3)

De aquí obtenemos dos ecuaciones: k=6 λ => 1=3 λ $\Longrightarrow$ λ=1/3

Sustituyendo en la primera ecuación: k=6·1/3=2 (par)

8. La integral definida $$\int_{-5}^{5} \frac{x^{2023}}{x^{2024}+2}\,dx$$

a) Cumple que I > 1
b) Cumple que I < 1
c) Ninguna de las anteriores

$$\int_{-5}^{5} \frac{\overbrace{x^{2023}}^{impar}}{\underbrace{x^{2024}+2}_{par}}\,dx = impar$$

Teoría: una función impar en un intervalo definido simétrico (a=-b), su integral =0 < menor que 1.

9. La integral $$\int_{0}^{\pi} (x + \operatorname{sen}x)\,dx$$

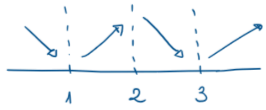
a) Es menor o igual que 0
b) Es mayor que $\pi^2/2$
c) Ninguna de las anteriores

$$\int_0^{\pi} x + \operatorname{sen} x \; dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^{\pi} = F(\pi) - F(0) = \left(\frac{\pi^2}{2} - \overset{\approx 1}{\cancel{\cos \pi}}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \overset{1}{\cancel{\cos 0}}\right) = \frac{\pi^2 - 2}{2} + 1 = \boxed{\frac{\pi^2}{2}}$$

10. La función f(x) = $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$:

a) Es decreciente en el intervalo (0, 2)
b) Es creciente en el intervalo (1, 2)
c) Ninguna de las anteriores

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0 \rightarrow x=1,\ x=3,\ x=2$



Decreciente: $(-\infty,1) \cup (2,3)$
Creciente: $(1,2) \cup (3,+\infty)$

11. El límite $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

a) No existe
b) Es igual a 0
c) Ninguna de las anteriores

$$\left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to 7} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{2x} \rightarrow \lim_{x \to 7} \frac{-1}{4x\sqrt{x-3}} = \frac{-1}{56} < 0$$

12. Sean A, B dos sucesos tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es P = 1/4. Entonces, la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra:

a) Es menor que 0.4
b) Es mayor que 0.6
c) Ninguna de las anteriores

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$\overbrace{P(\bar{A} \cup \bar{B})}^{P(\overline{A \cap B})} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 > 0{,}6$

13. Se lanzan simultáneamente 4 monedas. La probabilidad de obtener, al menos, una cara:

a) Es mayor que 0.8
b) Es menor que 0.3
c) Ninguna de las anteriores

$P(4\text{cruces}) = \frac{1}{16}$

$P(\text{Al menos } 1 \text{ cara}) = 1 - P(4\text{cruces}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0{,}94$

14. Sean A, B, C sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. El suceso "ocurren exactamente dos sucesos de entre los A, B, C" se expresa:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$
b) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$, donde la barra denota el suceso complementario
c) Ninguna de las anteriores

15. Sean A, B dos sucesos tales que P(A) = 2/5, P(B) = 1/3 y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1/3$, donde la barra denota el suceso complementario. Entonces:

a) $0.6 \le P(A \cup B) \le 0.7$
b) $0.1 \le P(A \cap B) \le 0.2$
c) Ninguna de las anteriores

a) $P(A\cup B) = 1 - \overbrace{P(\bar{A}\cap\bar{B})}^{P(\overline{A\cup B})} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,\hat{6}$ SI

b) $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3} = \frac{1}{15} \approx 0,0\hat{6}$ NO

PROBLEMAS

2 opciones (con dos problemas cada una). Elegir UNA OPCIÓN.

OPCIÓN 1.

1. Estudiar la existencia de inversa, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso a = 1/2, calcular la traza (suma de los elementos de la diagonal) de A^{-1}.

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ a & 1 \\ a & a \end{matrix}\Bigg| = 1 + \cancel{a^2} + a^3 - a - \cancel{a^2} - a^2 = 0$$

$$= a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \xrightarrow{\text{Ruffini}} \begin{matrix} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{matrix}$$

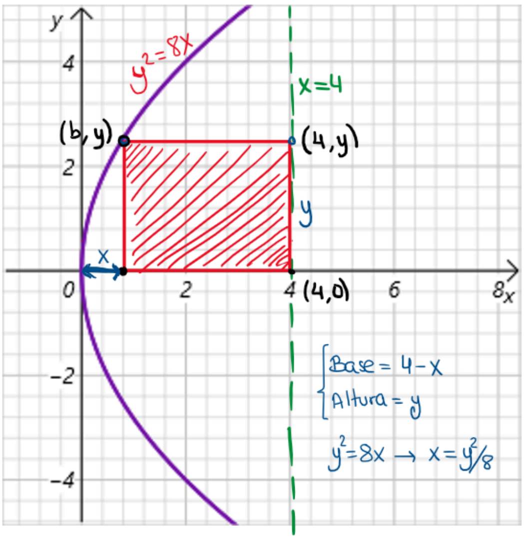
• Como $\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0$: Existirá inversa cuando $a \neq -1$ y $a \neq 1$

- $a = 1/2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \dfrac{3}{8}$

$$\rightarrow \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -3/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Adj } A^T = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 & 0 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2/3 & 2 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Traza} = 2 + 2 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

2. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse con su base en el eje horizontal y limitado por las curvas $y^2 = 8x$, $x = 4$. ¿Cuál es ese área?



Área rectángulo = Base · altura

$A(x,y) = (4-x)\cdot y$

$A(y) = \left(4 - y^2/8\right)\cdot y = \left[4y - \dfrac{y^3}{8}\right]$

como $y^2 = 8x$, si $x = 4 \longrightarrow y = \pm\sqrt{32}$

Por tanto $A(y)$ debe estar comprendido entre $[0, \sqrt{32}]$

$A'(y) = 4 - \dfrac{3}{8}y^2$

$A'(y) = 0 \rightarrow 4 - \dfrac{3}{8}y^2 = 0 \rightarrow y = \sqrt{32/3}$ ⇝ solución válida porque $\in [0, \sqrt{32}]$

Comprobamos que sea un máximo con $A''(y)$

$$A''(y) = -\frac{6}{8}y = -\frac{3}{8}y < 0 \longrightarrow \text{Es un máx. relativo}$$

Por tanto, si $\boxed{y=\sqrt{\frac{32}{3}}} \longrightarrow x = \frac{y^2}{8} = \frac{32/3}{8} = 4/3$

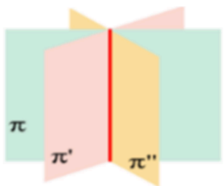
$\longrightarrow$ Base $= 4 - x = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$

$\longrightarrow$ Área $= \frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{32}{3}}\ u^2 = \boxed{\frac{32\sqrt{6}}{9}\ u^2}$

$\longrightarrow$ Para que el área sea máxima, la base del rectángulo debe medir $\frac{8}{3}u$ y la altura $y = \sqrt{\frac{32}{3}}\ u$.

OPCIÓN 2.

3. Dados los planos $\pi_1 : 2x - y + z = 3$, $\pi_2 : x - y + z = 2$, $\pi_3 : 3x - y - az = b$, determinar los valores de a, b $\in \mathbb{R}$ para que definan una única recta y obtener un vector director de la misma.



Para que 3 planos definan una recta deben formar un SCI (con ∞ sol.), es decir, $rg(A) = 2 = rg(A^*)$

$$\begin{cases} \text{Para que } rg(A) = 2 \longrightarrow |A|_3 = 0 \\ \text{Para que } rg(A^*) = 2 \longrightarrow |A^*|_3 = 0 \end{cases}$$

$$A^* = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{array}\right)}_{A} \begin{array}{l} \rightarrow \pi_1 \\ \rightarrow \pi_2 \\ \rightarrow \pi_3 \end{array}$$

$$|A| = 0 \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -a & 3 & -1 \end{array}\right| = 2a - 3 - 1 - a + 2 + 3 = 0$$

$$= a + 1 = 0 \longrightarrow \boxed{a = -1}$$

$$|A^*| = 0 \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & b & 3 & -1 \end{array}\right| = -2b - 6 - 3 + b + 4 + 9 = 0$$

$$= -b + 4 = 0 \longrightarrow \boxed{b = 4}$$

$\rightarrow$ Para que las dos matrices sean rango $= 2$ y se corten en 1 recta: $a = -1$ y $b = 4$

$\rightarrow$ Para obtener $\vec{v_r}$ calculamos el producto vectorial de dos de los planos (ya que forman parte de la recta general de intersección entre los planos):

$$\vec{v_r} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} - 2\vec{j} + \vec{i} + \vec{k} = -\vec{j} - \vec{k} \longrightarrow \vec{v_r} = (0, -1, -1)$$

4. Se reparten 5 papeletas de una tira numerada del 1 al 40. Calcular la probabilidad de que exactamente tres de las papeletas estén numeradas con múltiplos de 10 (no es necesario dar el resultado con decimales, basta con fracciones).

- **múltiplos de 10 entre 1 y 40**: Estos son 10, 20, 30 y 40, por lo tanto, hay 4 múltiplos de 10.
- Queremos que exactamente 3 de las 5 papeletas sean múltiplos de 10 y las otras 2 no lo sean.
- Por tanto, hay 4 múltiplos de 10 y necesitamos elegir 3 de ellos. Lo calculamos como un número combinatorio:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{24}{6\cdot 1} = 4$$

- Entre 1 y 40 hay 36 números que no son múltiplos de 10. Necesitamos elegir 2 de estos 36 números:

$$\binom{36}{2} = \frac{36!}{2!(36-2)!} = \frac{36\cdot 35}{2} = 630$$

- El número total de maneras de elegir 5 papeletas de 40 posibles está dado por:

$$\binom{40}{5} = \frac{40!}{5!(40-5)!} = 658008$$

- La probabilidad de que exactamente 3 de las 5 papeletas sean múltiplos de 10 es el cociente del número de formas favorables sobre el número total de formas posibles:

$$P = \frac{4\cdot 630}{658008} = \frac{2520}{658008} = \boxed{\frac{30}{7831}}$$